Sumas de Potencias vía CSN: Un Enfoque Aritmético

Yasser A. Chavez

Puerto Vallarta, Jalisco, México

Resumen. El documento propone un método aritmético alternativo para calcular sumas de potencias usando tres familias de secuencias: coeficientes binomiales, su combinación y los números de Narayana. Este enfoque, basado en reconocimiento de patrones, es más pedagógico y accesible que el método tradicional de integración iterada, aunque menos sistemático. Además, se exploran conjeturas sobre coeficientes para potencias impares y el comportamiento asintótico de la matriz de coeficientes, destacando su utilidad para la enseñanza de las matemáticas.

13/08/2026

Este texto reúne, de forma muy compacta, los resultados más relevantes de mis trabajos desarrollados durante 2024 y 2025. Además, se incorpora un concepto nuevo: la matriz de memoria, la cual contiene todos los coeficientes que se acoplan a los coeficientes de las secuencias iniciales para expresar cualquier suma de potencias con exponente impar.

El objetivo de este texto es exponer de manera clara y concisa el enfoque de las secuencias de sumas naturales (CSN) para resolver sumas de potencias. En mis escritos anteriores, este enfoque no lograba destacar debido al ruido generado por objetos ad hoc o por resultados erróneos. Por ello, este material aspira también a servir como una consulta rápida para futuras investigaciones o como base para una clase introductoria sobre dicho enfoque.

Sumas de Potencias vía CSN: Un Enfoque Aritmético

Yasser A. Chavez

Para Mel

Cuando me miras

mis ojos son llaves,

el muro tiene secretos,

mi temor palabras, poemas.

Solo tú haces de mi memoria

una viajera fascinada,

un fuego incesante.

-Pizarnik

1 Fundamentos

El cálculo de la suma de los primeros números naturales a la potencia p,

$$\sigma_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p, \quad p \in \mathbb{N},$$

busca una regla universal para calcular la suma de una secuencia de números naturales elevados a un mismo exponente. A lo largo de la historia, matemáticos desde la Antigüedad hasta el Renacimiento —como Arquímedes, Alhazen y Faulhaber— lograron resolver casos particulares para potencias bajas mediante métodos geométricos y algebraicos. Sin embargo, no fue hasta el siglo XVIII cuando Jakob Bernoulli halló la solución definitiva al descubrir una fórmula general fundamentada en una célebre secuencia de constantes conocida hoy como los números de Bernoulli, unificando siglos de esfuerzos en una sola herramienta fundamental.

La necesidad de una representación combinatoria alternativa —a saber, {C, S, N}— radica en su operatividad y en el aprovechamiento de información previa, lo cual ofrece mejoras en la pedagogía matemática. Esto contrasta con métodos como el de Pascal (sumas telescópicas), donde la operatividad resulta extremadamente tediosa; sin embargo, no lo compararemos con este último por considerarlo una comparación desproporcionada. Por ello, una vez presentado nuestro enfoque aritmético (NSC), lo contrastaremos con un método de integración iterada (MII) para discutir aspectos de interés para la pedagogía matemática.

1.1 Elementos de la Base {C, S, N}

La base {C, S, N} se compone de tres familias de secuencias: los coeficientes binomiales $C(n, k)$, la suma de dos coeficientes binomiales consecutivos definida como $S(n, k) = C(n\text{-}1, k) + C(n, k)$, y los números de Narayana $N(n, k)$, definidos como $N(n, k) = C(n, k\text{-}1) \bullet C(n+1, k\text{-}1)/k$.

Nuestro objetivo principal es expresar cualquier suma de potencias utilizando únicamente las tres familias de secuencias. Por lo tanto, la base debe sustentarse en una operatividad válida para múltiples valores de p, y la combinación de la base con el operador debe constituir un sistema cerrado; es decir, al operar sobre una potencia p, el resultado devuelto por el operador debe ser un elemento perteneciente a la misma base.

Gran parte de nuestra operatividad se basa en el reconocimiento de secuencias, por lo que resulta útil tener a mano las siguientes listas:

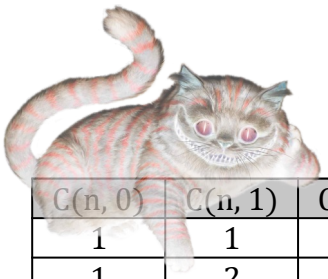


Tabla-C(n, k)

C(n, 0)	C(n, 1)	C(n, 2)	C(n, 3)	C(n, 4)	C(n, 5)	C(n, 6)	C(n, 7)	C(n, 8)	C(n, 9)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

Tabla-S(n, k)

S(n, 0)	S(n, 1)	S(n, 2)	S(n, 3)	S(n, 4)	S(n, 5)	S(n, 6)	S(n, 7)	S(n, 8)	S(n, 9)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	5	9	14	20	27	35	44	54	65
2	7	16	30	50	77	112	156	210	275
2	9	25	55	105	182	294	450	660	935
2	11	36	91	196	378	672	1122	1782	2717
2	13	49	140	336	714	1386	2508	4290	7007
2	15	64	204	540	1254	2640	5148	9438	16445
2	17	81	285	825	2079	4719	9867	19305	35750
2	19	100	385	1210	3289	8008	17875	37180	72930

Tabla-N(n, k)

N(n, 1)	N(n, 2)	N(n, 3)	N(n, 4)	N(n, 5)	N(n, 6)	N(n, 7)	N(n, 8)	N(n, 9)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	6	10	15	21	28	36	45
1	6	20	50	105	196	336	540	825
1	10	50	175	490	1176	2520	4950	9075
1	15	105	490	1764	5292	13860	32670	70785
1	21	196	1176	5292	19404	60984	169884	429429
1	28	336	2520	13860	60984	226512	736164	2147145
1	36	540	4950	32670	169884	736164	2760615	9202050
1	45	825	9075	70785	429429	2147145	9202050	34763300
1	55	1210	15730	143143	1002001	5725720	27810640	...

1.2 Identidades (CCC, NCC, NSC)

Para que la base y el operador constituyan un sistema cerrado, requerimos identidades que nos ayuden a transformar aquellas secuencias que, en una primera instancia, dan como resultado expresiones difíciles de identificar. Por ello, podemos hacer la distinción entre la operatividad primaria —el conjunto de operaciones «naturales» que surgen directamente del problema, como las diferencias (Δ), multiplicaciones (n≥1) y sumas (Σ)— y la operatividad secundaria, entendida como el conjunto de operaciones de mayor nivel de abstracción, como las identidades derivadas de un estudio empírico.

Las tres identidades que utilizaremos a lo largo del texto son las siguientes:

$$C(n+1,\ 2)^2 = 6\cdot C(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2) = \sigma_3(n),$$

$$N(n+2,\ 4) = 5\cdot C(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4),$$

$$N(n,\ k) = \frac{S(n,\ k-1)^2 - C(n-1,\ k-2)^2}{4k} \quad donde \quad n,k\in\mathbb{N} \ \ y \ \ k\geqslant 2.$$

1.3 4≤p≤8

Una vez definido por completo nuestro sistema operatorio (Base → Operador → Base), podemos proceder a resolver sumas de potencias con p≥4, dado que los casos $p = 1, 2, 3$ corresponden a situaciones en las que resulta sencillo identificar las secuencias $C(n+1, 2) = \sigma_1(n)$, $S(n+2, 3) = \sigma_2(n)$ y $C(n+1, 2)^2 = \sigma_3(n)$.

1.3.1 Operador Primario

Denotaremos la operatividad primaria (Δ, n≥1 y Σ) con la letra griega φ; por ejemplo, $\varphi(\Sigma k) = \Sigma k^2$. Denominamos solución aritmética a aquella en la que, al aplicar el operador primario a una secuencia $a(n)$, se obtiene como resultado una única secuencia $b(n)$ acompañada de un coeficiente C que debe ser un número entero, lo cual se traduce en una división durante el proceso de cálculo.

1.3.2 p = 4

$$\begin{aligned}\varphi(\Sigma k^3) &= 6\cdot\varphi(C(n+2,\ 4)) + \varphi(C(n+1,\ 2))\\ &= 6\cdot(2\cdot S(n+3,\ 5)) + S(n+2,\ 3)\\ &= 12\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)\end{aligned}$$

1.3.3 p = 5

$$\begin{aligned}\varphi(\Sigma k^4) &= 12\cdot\varphi(S(n+3,\ 5)) + \varphi(S(n+2,\ 3))\\ &= 12\cdot(2\cdot N(n+2,\ 4)) + C(n+1,\ 2)^2\\ &= 24\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2\end{aligned}$$

1.3.4 p = 6

$$\begin{aligned}\varphi\left(\Sigma k^5\right) &= 24\cdot\varphi\left(N(n+2,\ 4)\right) + \varphi\left(C(n+1,\ 2)^2\right)\\ &= 24\cdot\left(5\cdot\varphi\left(C(n+3,\ 6) + \varphi\left(C(n+2,\ 4)\right)\right)\right) + 12\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)\\ &= 24\cdot\left(5\cdot 3\cdot S(n+4,\ 7) + 2\cdot S(n+3,\ 5)\right) + 12\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)\\ &= 360\cdot S(n+4,\ 7) + 60\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)\end{aligned}$$

Notemos que, para los valores de $p = 2, 4, 6$, únicamente utilizamos secuencias S(n, k), mientras que para $p = 1, 3, 5$ solo empleamos secuencias C(n, k). Cabe preguntarse entonces: ¿es posible expresar las sumas de potencias impares utilizando exclusivamente la base {C} y las sumas de potencias pares mediante la base {S}? La respuesta es afirmativa. De hecho, Knuth, en la sección 5 («All-integer formulas») de su artículo [1], expone ambas bases y proporciona las fórmulas para calcular sus coeficientes.

Por lo tanto, nuestra base {C, S, N} es un híbrido de las bases {C} y {S}, donde los números de Narayana emergen como una consecuencia natural del colapso de ambas bases mediante el operador primario. Gracias a estos números, podemos intentar construir una operatividad que antes no existía para las bases {C} y {S}, ya que, debido a los saltos en las potencias, resulta difícil obtener soluciones aritméticas empleando únicamente el operador primario.

Para calcular el caso $p = 7$, necesitamos la siguiente fórmula:

$$\sigma_6(n) = 36\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + 24\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3). \qquad (1.0)$$

La Fórmula 1.0 se obtiene al calcular φ(N(n+2, 4)), pero no constituye una solución aritmética, dado que dicha expresión genera dos secuencias, lo cual dificulta su identificación. En cambio, si optamos por calcular φ(NCC), obtenemos la fórmula de σ_6 en la base {S}.

1.3.5 p = 7

$$\begin{aligned}\varphi\left(\Sigma k^6\right) &= 36\cdot\varphi\left(\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2\right) + 24\cdot\varphi\left(S(n+3,\ 5)\right) + \varphi\left(S(n+2,\ 3)\right)\\ &= 36\cdot\left(2\cdot C(n+2,\ 4)^2\right) + 24\cdot\left(2\cdot N(n+2,\ 4)\right) + C(n+1,\ 2)^2\\ &= 72\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 48\cdot N(n+2,\ 4) + C(n+1,\ 2)^2\end{aligned}$$

1.3.6 p = 8

$$\begin{aligned}\varphi\left(\Sigma k^7\right) &= 72\cdot\varphi\left(C(n+2,\ 4)^2\right) + 48\cdot\varphi\left(N(n+2,\ 4) + \varphi\left(C(n+1,\ 2)^2\right)\right)\\ &= 72\cdot\left(2\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2\right) + 48\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + \frac{1}{2}\cdot S(n+3,\ 5)\right) + 12\cdot S(n+3,\ 5)\\ &\qquad + S(n+2,\ 3)\end{aligned}$$

$$= 144\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 \ +\ 72\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 \ +\ 36\cdot S(n+3,\ 5) \ +\ S(n+2,\ 3)$$

1.4 $9 \leq p \leq 13$

En la sección 1.3 solo necesitamos el operador primario (φ) y las identidades CCC y NCC; sin embargo, ninguno de estos objetos matemáticos es exclusivo de nuestra base. Precisamente, las identidades CCC y NCC pertenecen a la base {C}. El único objeto matemático exclusivo de nuestra base {C, S, N} es la identidad NSC, la cual nos será de utilidad al calcular valores elevados de p a medida que nos distanciemos de las bases {C} y {S}.

1.4.1 p = 9

Con el fin de simplificar el trabajo operativo, omitiremos las secuencias previamente calculadas y nos centraremos en la secuencia nueva; es decir, en $\Sigma S(k+2, 4)^2$.

Recordemos que el operador primario (φ) se compone de tres operaciones, siendo la primera de ellas la diferencia (Δ), que es la operación inversa a la sumatoria. Por esta razón, podemos aislar la secuencia $S(n+2, 4)^2$ para, posteriormente, aplicar la identidad NSC:

$$\Delta\left(\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2\right) \ =\ S(n+2,\ 4)^2 \ =\ 20\cdot N(n+2,\ 5) \ +\ C(n+1,\ 3)^2.$$

La siguiente tabla ilustra la aplicación de las operaciones ($n \geq 1$ y Σ) sobre las secuencias $N(n+2, 5)$ y $C(n+1, 3)^2$:

$C(n+1, 3)^2\cdot(n/2)$	$\Sigma(C(k+1, 3)^2\cdot(k/2))$	$N(n+2, 5)\cdot(n/3)$	$\Sigma(N(k+2, 5)\cdot(k/3))$
$(0\cdot1)/2 = 0$	0	$(0\cdot1)/3 = 0$	0
$(1\cdot2)/2 = 1$	1	$(0\cdot2)/3 = 0$	0
$(16\cdot3)/2 = 24$	25	$(1\cdot3)/3 = 1$	1
$(100\cdot4)/2 = 200$	225	$(15\cdot4)/3 = 20$	21
$(400\cdot5)/2 = 1000$	1225	$(105\cdot5)/3 = 175$	196
$(1225\cdot6)/2 = 3675$	4900	$(490\cdot6)/3 = 980$	1176
$(3136\cdot7)/2 = 10976$	15876	$(1764\cdot7)/3 = 4116$	5292
$(7056\cdot8)/2 = 28224$	44100	$(5292\cdot8)/3 = 14112$	19404
$(14400\cdot9)/2 = 64800$	108900	$(13860\cdot9)/3 = 41580$	60984
$(27225\cdot10)/2 = 136125$	245025	$(32670\cdot10)/3 = 108900$	169884

Notemos que las secuencias resultantes en la tabla, (0, 1, 25, 225, 1225, 4900, 15876, 44100, 108900, 245025, ...) y (0, 0, 1, 21, 196, 1176, 5292, 19404, 60984, 169884, ...) son respectivamente $C(n+2, 4)^2$ y $N(n+3, 6)$.

$$\varphi\left(\Sigma k^8\right) \ =\ 8640\cdot N(n+3,\ 6) \ +\ 432\cdot C(n+2,\ 4)^2 \ +\ 72\cdot N(n+2,\ 4) \ +\ C(n+1,\ 2)^2$$

1.4.2 p = 10

$$\varphi\left(30\cdot N(n+3,\ 6)\ +\ C(n+2,\ 4)^2\right)\ =\ 2\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta N(k+2,\ 4)\right)^2$$

La única forma de obtener una solución aritmética consiste en considerar como una sola secuencia las dos expresiones $(30\bullet\mathrm{N}(n+3, 6), \mathrm{C}(n+2, 4)^2)$; de lo contrario, aplicar el operador φ a $\mathrm{N}(n+3, 6)$ nos devuelve una secuencia intrincada. Por lo tanto, hacemos la distinción entre $288\bullet\mathrm{C}(n+2, 4)^2$ y $144\bullet\mathrm{C}(n+2, 4)^2$ (secuencia que venimos arrastrando desde el caso $p = 7$).

$$\varphi\left(\Sigma k^9\right)\ =\ 576\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4)\ -\ N(k+1,\ 4)\right)^2\ +\ 288\cdot\sum_{k=1}^{n}S(k+2,\ 4)^2\ +\ 108\cdot\sum_{k=1}^{n}C(k+1,\ 3)^2$$
$$+\ 48\cdot S(n+3,\ 5)\ +\ S(n+2,\ 3)$$

1.4.3 p = 11

Para calcular el caso $p = 11$, requerimos que el operador (φ) presente mayor flexibilidad en la multiplicación, dado que realizaremos el cálculo de $p = 11$ a partir de $p = 9$. Por esta razón, $\varphi(\mathrm{a}(n), 2)$ se define como $(\Delta, n^2 \geq 1, \Sigma)$.

$$\varphi\left(C(n+2,\ 4)^2,\ 2\right)\ =\ 4\cdot\left(30\cdot N(n+3,\ 6)\ +\ C(n+2,\ 4)^2\right)\ =\ 4\cdot NSC_1(n)$$

Con el fin de compactar la notación, denotaremos la expresión $30\bullet\mathrm{N}(n+3, 6) + \mathrm{C}(n+2, 4)^2$ como $\mathrm{NSC}_1(n)$, asilando así el factor común.

$$8640\cdot\varphi\left(N(n+3,\ 6),\ 2\right)\ +\ 1728\cdot NSC_1(n)\ =\ 1728\cdot\left(5\cdot\varphi\left(N(n+3,\ 6),\ 2\right)\ +\ NSC_1(n)\right)$$
$$=\ 1728\cdot N(n+2,\ 4)^2$$

Es la primera potencia en la que la solución final se obtiene por factor común, dado que $\varphi(\mathrm{N}(n+3, 6), 2)$ no constituye una solución aritmética, como tampoco lo hace $\varphi(\mathrm{NSC}_1(n), 2)$, aunque el resultado sigue siendo una solución elemental.

$$\varphi\left(\Sigma k^{10}\right)\ =\ 1728\cdot N(n+2,\ 4)^2\ +\ 216\cdot C(n+2,\ 4)^2\ +\ 96\cdot N(n+2,\ 4)\ +\ C(n+1,\ 2)^2$$

1.4.4 p = 12

$$\varphi\left(C(n+2,\ 4)^2,\ 3\right)\ =\ 8\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4)\ -\ N(k+1,\ 4)\right)^2$$

Recordemos que el coeficiente de $\mathrm{C}(n+2, 4)^2$ en la sec. 1.4.1 es 432, por lo que $432\bullet 8 = 3456$.

$$1728\cdot\left(5\cdot\varphi\left(N(n+3,\ 6),\ 3\right)\ +\ \sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4)\ -\ N(k+1,\ 4)\right)^2\right)\ =\ 1728\cdot\sum_{k=1}^{n}S(k+2,\ 4)^3$$

$$\varphi\left(\Sigma k^{11}\right) = 1728\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^3 + 1728\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(N(k+2,\ 4) - N(k+1,\ 4)\right)^2$$
$$+ 432\cdot\sum_{k=1}^{n} S(k+2,\ 4)^2 + 144\cdot\sum_{k=1}^{n} C(k+1,\ 3)^2 + 60\cdot S(n+3,\ 5) + S(n+2,\ 3)$$

1.4.5 p = 13

$$\varphi\left(N(n+2,\ 4)^2,\ 2\right) = \varphi\left(\left(5\cdot C(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4)\right)^2,\ 2\right)$$

$$\left(5\cdot C(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4)\right)^2 = 25\cdot C(n+3,\ 6)^2 + 10\cdot C(n+3,\ 6)\cdot C(n+2,\ 4) + C(n+2,\ 4)^2$$
$$= 25\cdot C(n+3,\ 6)^2 + 10\cdot 5\cdot N(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4)^2$$

$$\varphi\left(C(n+2,\ 4)^2,\ 2\right) = 4\cdot NSC_1(n)$$

$$\varphi\left(N(n+3,\ 6),\ 2\right) = \frac{N(n+2,\ 4)^2 - NSC_1(n)}{5}$$ (Sin solución aritmética)

$$\varphi\left(C(n+3,\ 6)^2\right) = 3\cdot S(n+3,\ 6)^2$$

$$S(n+3,\ 6)^2 = 28\cdot N(n+3,\ 7) + C(n+2,\ 5)^2$$

$$\varphi\left(N(n+3,\ 7)\right) = 4\cdot N(n+4,\ 8)$$

$$\varphi\left(C(n+2,\ 5)^2\right) = 3\cdot C(n+3,\ 6)$$

Recuperamos los coeficientes de las secuencias, recordando que el coeficiente de $N(n+2,\ 4)^2$ en la sección 1.4.3 es 1728:

$$+ 129600\cdot\left(NSC_2(n) = 112\cdot N(n+4,\ 8) + 3\cdot C(n+3,\ 6)\right)$$

$$+ 1728\cdot 10\cdot 5\left(\frac{N(n+2,\ 4)^2 - NSC_1(n)}{5}\right) = 17280\cdot N(n+2,\ 4)^2 - 17280\cdot NSC_1(n)$$

$$+ 1728\cdot 4\cdot NSC_1(n) = 6912\cdot NSC_1(n)$$

$$= 129600\cdot NSC_2(n) + 17280\cdot N\left(n+2,\ 4^2\right) - 10368\cdot NSC_1(n)$$

$$\varphi\left(\Sigma k^{12}\right) = 129600\cdot NSC_2(n) + 17280\cdot N(n+2,\ 4)^2 - 9504\cdot NSC_1(n) + 288\cdot C(n+2,\ 4)^2$$
$$+ 120\cdot N(n+2,\ 4)^2 + C(n+1,\ 2)^2$$

2 Teoría Predictiva y Conjeturas

Es posible construir una teoría predictiva más completa para las potencias impares; por lo tanto, en esta sección abordaremos únicamente este caso.

Denotaremos una secuencia arbitraria en función de p como:

$$\delta_p(n).$$

Dicha secuencia es la que contiene los términos de mayor grado; es decir, aquella calculada recientemente, y nos referiremos a ella como la secuencia inicial.

2.1 Fórmula cerrada para los coeficientes de N(n, 2k), k≥1

$$C_N(m) = \frac{(2m)!(2m+2)!}{2}, \quad m \geqslant 0$$

Si realizamos el cálculo para $m = 0, 1, 2$ y 3, obtenemos $1, 24, 8640$ y $14515200 = 129600 \cdot 112$, respectivamente.

2.2 p = 4m – 1, m≥1

2.2.1 Conjetura 1.0

La secuencia inicial para valores de $p = 4m - 1$:

$$\delta_p(n) = \delta_{\frac{p-1}{2}}(n)^2$$

Esta conjetura puede considerarse como
una generalización del teorema de Nicómaco.

Los coeficientes que acompañan a la secuencia inicial se dividen en las siguientes dos familias:

1) p = 2^(m)-1:

$$\frac{1}{p'+1}\left(3^{3p'+1} \cdot 2^{p'+1}\right) \cdot \delta_{\frac{p-1}{2}}(n)^2, \quad p' = \frac{p+1}{4} - 1$$

p'=0:6, p'=1:72, p'=3:20736, ...

2) p = 8m-5:

$$\frac{p+1}{4} \cdot Coef\left(\delta_{\frac{p-1}{2}}(n)\right)^2 \cdot \delta_{\frac{p-1}{2}}(n)^2$$

2.2.2 NSC Triples

En la sección 1.4.2 definimos la secuencia $\mathrm{NSC}_1(\mathrm{n})$ para forzar una solución aritmética. Aunque podría considerarse un objeto ad hoc o un constructo artificial de nuestro marco de trabajo, la posibilidad de calcular sus coeficientes internos la consolida como un objeto matemático legítimo y exclusivo de nuestra base.

A partir de la identidad NSC en $\mathrm{NSC}_1(\mathrm{n})$ y $\mathrm{NSC}_2(\mathrm{n})$, es posible llegar a las siguientes igualdades:

$$30 \cdot N(n+3,\ 6) + C(n+2,\ 4)^2 = 6 \cdot N(n+3\ 6) + S(n+3,\ 5)^2,$$

$$112 \cdot N(n+4,\ 8) + 3 \cdot C(n+3,\ 6)^2 = 16 \cdot N(n+4,\ 8) + 3 \cdot S(n+4,\ 7)^2.$$

Los factores clave en las igualdades son $(30,\ 6)$ y $(112,\ 16)$, dado que los demás términos permanecen invariantes y se relacionan de la siguiente forma: $30 \div 5 = 6$ y $112 \div 7 = 16$. Por lo tanto, podemos conjeturar la igualdad 1.0:

$$a' \cdot N(n,\ 2k) + b \cdot C(n-1,\ 2k-2)^2 = a \cdot N(n,\ 2k) + b \cdot S(n,\ 2k-1)^2.$$

Mediante SageMath, obtenemos los dos triples que satisfacen la igualdad:

p = 8m-3, m≥1:

$$(\mathrm{a}=8\mathrm{m},\ \mathrm{a'}=\mathrm{a}(4\mathrm{m}-1),\ \mathrm{b}=2\mathrm{m}-1)$$

p = 8m+1, m≥1:

$$(\mathrm{a}=\mathrm{C}(2\mathrm{m}+2,\ 2),\ \mathrm{a'}=\mathrm{a}(4\mathrm{m}+1),\ \mathrm{b}=\mathrm{C}(\mathrm{m}+1,\ 2))$$

Para demostrar los triples $8\mathrm{m}-3$ y $8\mathrm{m}+1$, se sustituyen (a, a', b) por sus respectivos valores en la igualdad (1.0). Al hacerlo, se obtiene como resultado la identidad NSC, la cual se reduce a $4\mathrm{k} = 16\mathrm{m}$, de donde se deduce que $\mathrm{k} = 4\mathrm{m}$ debido al salto de los índices.

A partir de los triples, es posible definir las secuencias NSC:

p = 8m-3, m≥1:

$$NSC_{2(m-1)}(n) = a'(m) \cdot N(n,\ 2\mathrm{k}) + b(m) \cdot C(n-1,\ 2\mathrm{k}-2)^2$$

p = 8m+1, m≥1:

$$NSC_{2m-1}(n) = a'(m) \cdot N(n,\ 2k) + b(m) \cdot C(n-1,\ 2k-2)^2$$

2.3 p = 4m+1, m≥1

2.3.1 Conjetura 2.0

La secuencia inicial y su coeficiente para valores de p = 8m−3:

$$\frac{C_N(2m-1)}{a'(m)} \cdot NSC_{2(m-1)}(n).$$

La secuencia inicial y su coeficiente para valores de p = 8m+1:

$$\frac{C_N(2m)}{a'(m)} \cdot NSC_{2m-1}(n).$$

Las conjeturas 1.0 y 2.0 logran mapear todas las secuencias iniciales para potencias impares; sin embargo, cuando estas vuelven a aparecer, sus coeficientes ya no son tan fáciles de predecir, por lo que aún no existe una fórmula general para cualquier valor de p.

3 CSN vs MII

El método MII consta de tres pasos: primero se integra, después se multiplica por una constante (1, 2, 3, 4, ..., respectivamente) y, por último, se suma un número de Bernoulli. A continuación, se presentan varios ejemplos de este método:

$$\sigma_0(n) = n$$

$$\sigma_1(n) = 1\left(\frac{n^2}{2}\right) + C_1 n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$\sigma_2(n) = 2\left(\frac{1}{2}\frac{n^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{n^2}{2}\right) + C_1 n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$\sigma_3(n) = 3\left(\frac{1}{3}\frac{n^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{n^3}{3} + \frac{1}{6}\frac{n^2}{2}\right) + C_1 n = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

La constante C_1 se calcula restando a 1 los coeficientes de los términos de grado ≥1:

$$C_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$C_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$
$$C_1 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$$

3.1 Pattern Recognition vs Next Step

El método MII pertenece a la categoría de «siguiente paso» (next step), al igual que el método de Pascal; es decir, el paso siguiente siempre está claro. Por su parte, las bases {C} y {S}, aunque cuentan con una fórmula general, no pertenecen a dicha categoría, dado que carecen de una operatividad capaz de hilar todas las potencias de la misma manera que lo hacen el método MII o el de Pascal.

La base {C, S, N} puede considerarse un método basado en gran medida en el reconocimiento de patrones, con una operatividad que casi consigue hilar todas las potencias desde $p = 1$ hasta $p = 13$, a excepción de $p = 6$, donde la fórmula deja de ser útil.

Por consiguiente, la base {C, S, N} resulta muy atractiva para la pedagogía moderna, ya que ofrece un sinfín de experiencias significativas a los estudiantes, quienes solo requieren una calculadora y las tablas de secuencias. Esto hace posible la aritmétización de un problema que, durante más de 300 años, se resolvió mediante el álgebra.

Agradecimientos. Este texto no podría haber sido escrito sin la ayuda de mi abuela María Esther.

Referencias

[1] D. E. Knuth, Johann Faulhaber and sums of powers, Math. Compt. 61 (1993), 277–294.

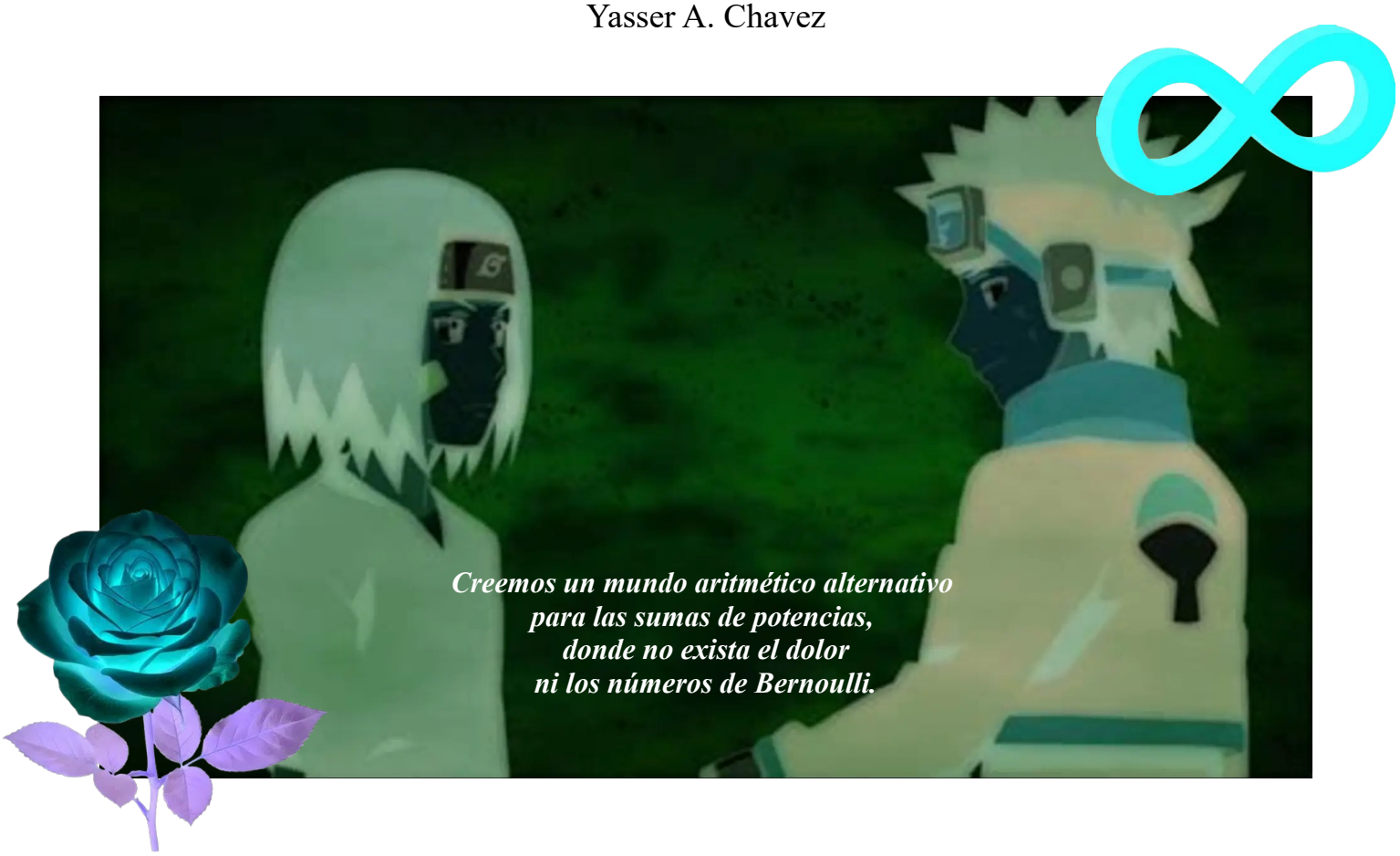
Palabras clave: teoría de números, combinatoria, coeficientes binomiales, números de narayana, sumas de potencias, faulhaber, bernoulli.

SHOT OUT TO FAULHABER

Contacto: math.yasserarath@gmail.com

Convergencia de los Coeficientes Secundarios en la Base {C, S, N} para Potencias Impares: Un Análisis Asintótico

Yasser A. Chavez



1 La Matriz de Memoria

La matriz de memoria es el arreglo que contiene todos los coeficientes que se acoplan a los coeficientes de las secuencias iniciales, con el fin de expresar cualquier suma de potencias para valores impares de p.

Matriz de Memoria

	-	δ_{23}	δ_{21}	δ_{19}	δ_{17}	δ_{15}	δ_{13}	δ_{11}	δ_{9}	-	-	-
σ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
σ_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
σ_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1
σ_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	1
σ_{11}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	4	1
σ_{13}	0	0	0	0	0	0	1	10	-33	4	5	1
σ_{15}	0	0	0	0	0	1	0	10	-20	5	6	1
σ_{17}	0	0	0	0	1	28	-294	-1216	5733	6	7	1
σ_{19}	0	0	0	1	-3	-58	828	3419	-15960	7	8	1
σ_{21}	0	0	1	60	-1626	-25948	349923	1377146	-6473741	8	9	1
σ_{23}	0	1	-11	-636	17840	284675	-3836868	-15098484	70977060	9	10	1
σ_{25}	1	110	-6281	-246400	7894755	119442160	-1626520060	-6360805200	29913085305	10	11	1

El segundo coeficiente de δ_{25} es $13/2$, que es el primer coeficiente racional en la matriz.

A modo de ejemplo, al emplear los coeficientes de la matriz, es posible expresar la suma correspondiente a p=13:

$$\sigma_{13}(n) = 1\cdot 129600\cdot NSC_2(n) + 10\cdot 1728\cdot N(n+2,\ 4)^2 + -33\cdot 288\cdot NSC_1(n) + 4\cdot 72\cdot C(n+2,\ 4)^2 + 5\cdot 24\cdot N(n+2,\ 4) + 1\cdot 1\cdot C(n+1,\ 2)^2$$

1.1 Patrones en la Matriz de Memoria

El único patrón no trivial en cualquier diagonal o columna aparece en la segunda diagonal: la secuencia 2, 10, 28, 60, 110,..., que es el doble de S(n+2, 3) = 1, 5, 14, 30, 55,....

También podemos observar un patrón de crecimiento desigual en las diagonales, donde algunos términos crecen más rápido que otros. Por ejemplo, en la segunda diagonal, los términos (2, 0, 0, -3, -11, $13/2$) son siempre menores que sus dos términos más cercanos, es decir, comparados con 1, 2, 10, 28, 60, 110.

Por lo tanto, podemos conjeturar que, al tomar valores absolutos, una subsecuencia de la diagonal presenta un crecimiento menor en comparación con la otra subsecuencia. Esto podría ser útil para generar coeficientes mediante el establecimiento de cotas superiores o inferiores.

Si bien no se dispone de una fórmula que genere los coeficientes de la matriz, sus columnas exhiben el siguiente comportamiento asintótico en el límite cuando $p \to \infty$:

$$\text{La razón columna}(\delta_9)/\text{columna}(\delta_{11}) \text{ converge a } 4.7$$
$$\text{La razón columna}(\delta_{11})/\text{columna}(\delta_{13}) \text{ converge a } 3.9$$
$$\text{La razón columna}(\delta_{13})/\text{columna}(\delta_{15}) \text{ converge a } 13.6$$
$$\text{La razón columna}(\delta_{15})/\text{columna}(\delta_{17}) \text{ converge a } 14.9$$

Así pues, podemos suponer que la razón entre cualquier par de columnas consecutivas converge a un valor constante.

1.2 Prueba en SageMath

```
var('n k')

def C(n, k):
 return binomial(n, k)

def S(n, k):
 return C(n-1, k) + C(n, k)

def N(n, k):
 return C(n, k)*C(n, k-1)/n

p25 = sum(k^25, k,1,n)

csn25 = 1*57360633200640000*(364*N(n+7, 14) + 6*C(n+6, 12)^2) +
110*17915904*N(n+2, 4)^4 - 6281*3292047360000*(264*N(n+6, 12) +
5*C(n+5, 10)^2) - 246400*414720*(30*N(n+3, 6) + C(n+2, 4)^2)^2 +
7894755*541900800*(135*N(n+5, 10) + 3*C(n+4, 8)^2) +
119442160*20736*C(n+2, 4)^4 - 1626520060*129600*(112*N(n+4, 8) +
3*C(n+3, 6)^2) - 6360805200*1728*(N(n+2, 4)^2) +
29913085305*288*(30*N(n+3, 6) + C(n+2, 4)^2) + 10*72*C(n+2, 4)^2 +
11*24*N(n+2, 4) + 1*1*C(n+1, 2)^2

print(p25.expand())
print(csn25.expand())
```

Sage Cell Server

Agradecimientos. Este texto no podría haber sido escrito sin la ayuda de mi abuela María Esther.